1.9 闭区间上连续函数的性质

1. 最大值和最小值定理

定义1.9.1 对于区间I上有定义的函数$f(x)$，如果有$x_0 \in I$，使得对于所有的$x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称$f(x_0)$为函数$f(x)$在区间I上的最大值 (最小值).

定理1.9.1 (最大最小值定理) 闭区间上的连续函数在该区间上一定可以取到最大值与最小值。

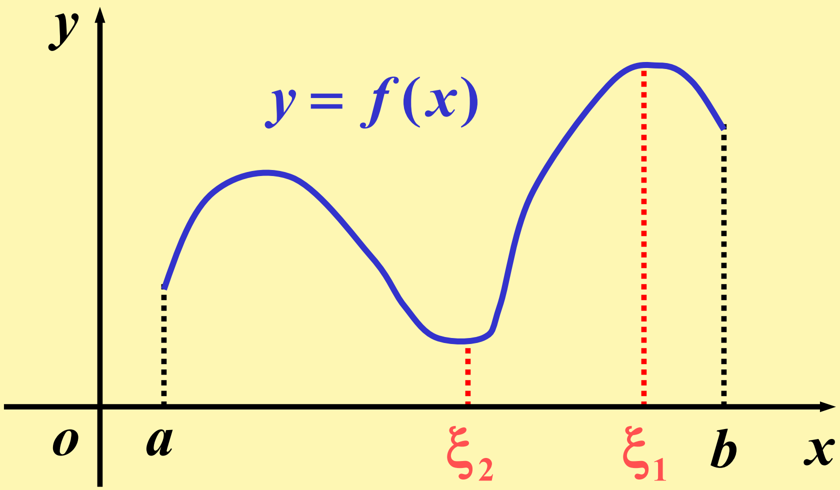
若 $f(x)\in C[a,b]$,

则 $\exists \xi_1,\xi_2\in[a,b]$,

使得 $\forall x\in[a,b]$,

有 $f(\xi_1)\ge f(x)$,

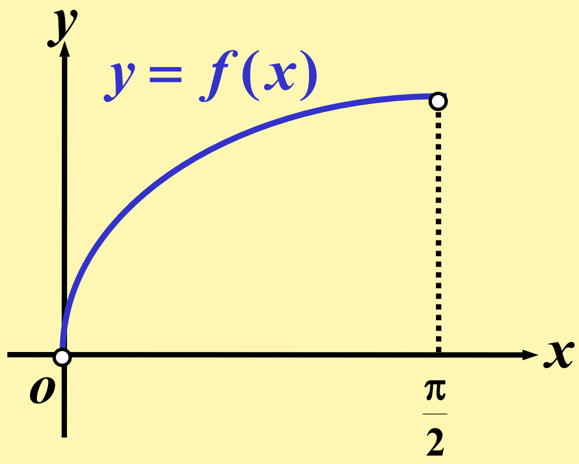
$f(\xi_2)\le f(x)$.

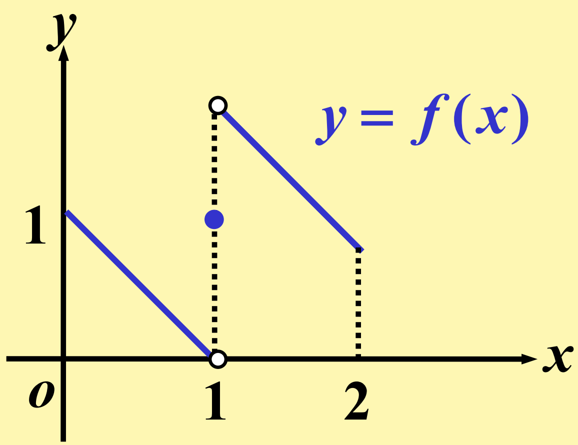


定理1.9.1 (最大最小值定理) 闭区间上的连续函数在该区间上一定可以取到最大值与最小值。

注意: 1.若区间是开区间，定理不一定成立;

2.若区间内有间断点，定理不一定成立.





定理2(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

证　设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, $\forall x \in [a,b]$,

有 $m \le f(x) \le M$, 取 $K = \max\{|m|, |M|\}$,

则有 $|f(x)| \le K$.　$\therefore$ 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界

2.介值定理

定义1.9.2　如果x_0使$f(x_0) = 0$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的零点.

x_0是函数 $f(x)$的零点

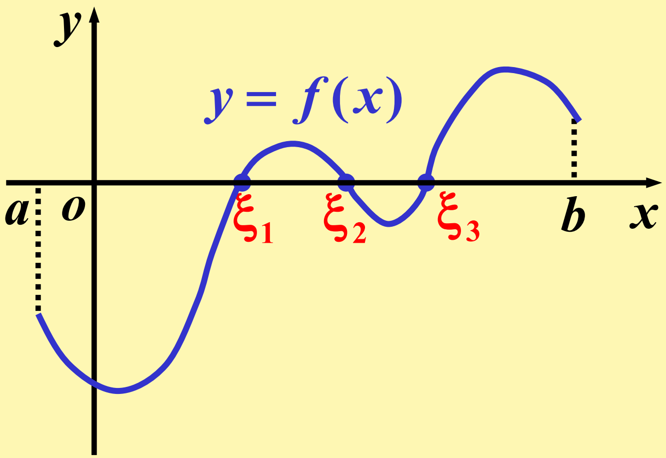
x_0是方程 $f(x)=0$的根

定理1.9.3(零点定理)设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号，那么在开区间(a,b)内至少有函数$f(x)$的一个零点。

即　　设$f(x)\in C_{[a,b]}, f(a)f(b)<0,$

那么$\exists\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0.$

几何解释:



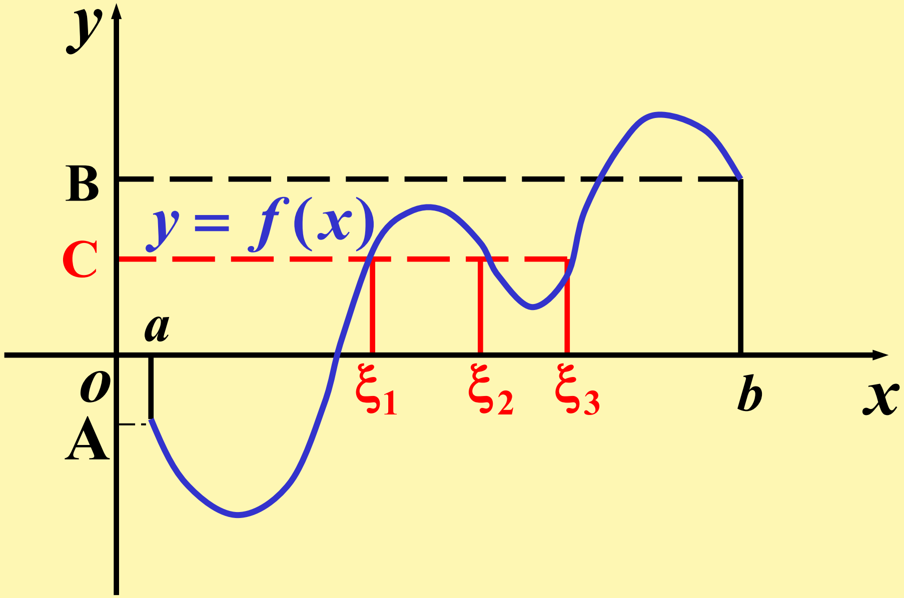
连续曲线弧 $y=f(x)$的两个端点位于x轴的不同侧,则曲线弧与 x轴至少有一个交点.

定理 4(介值定理) 设函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

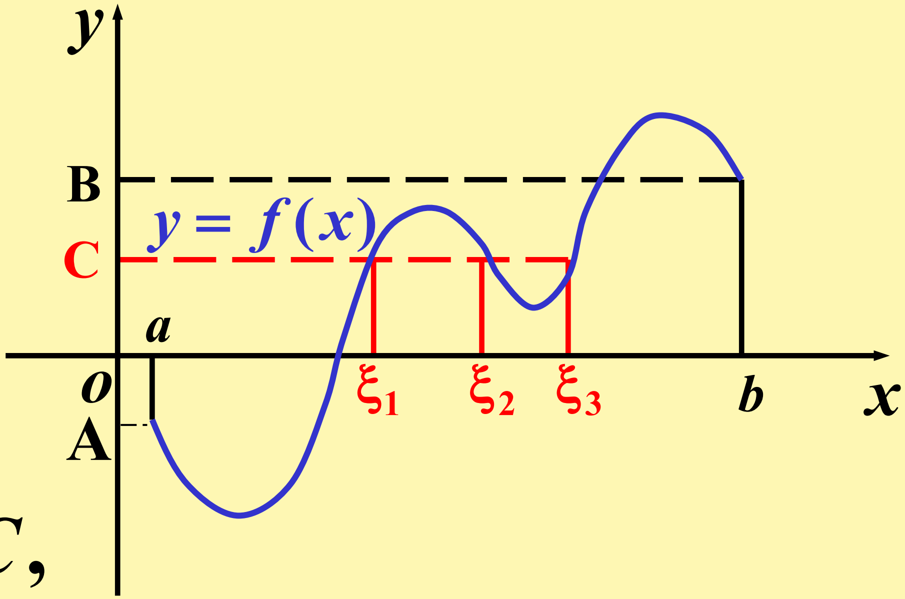
那末，对于A与B之间的任意一个数C，在开区间(a,b)内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=C \quad (a<\xi<b)$.

几何解释: 连续曲线弧$y=f(x)$与水平直线$y=C$至少有一个交点.



定理4(介值定理) 设 $f(x)\in C_{[a,b]}$, C介于 $f(a)=A$与 $f(b)=B$之间（即$A>C>B$或 $B>C>A$）

那么$\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=C$.



证 设$\varphi(x)=f(x)-C$,

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,

且$\varphi(a)=f(a)-C$

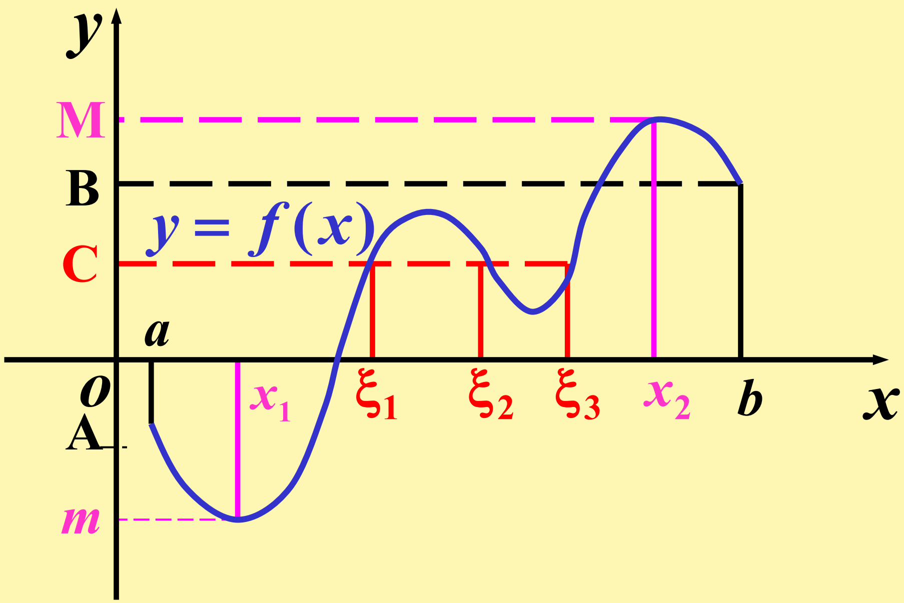
$=A-C$,

$\varphi(b)=f(b)-C=B-C$,

$\therefore \varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$, 由零点定理, $\exists\xi\in(a,b)$,使

$\varphi(\xi)=0$, 即 $\varphi(\xi)=f(\xi)-C=0$, $\therefore f(\xi)=C$.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值M与最小值m之间的任何值.



$$f(x)\in C_{[a,b]} \Rightarrow \exists m, M \text{ 使得 } m \le f(x) \le M$$

(1) $m < C < M \Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi)=C$

（介值定理）

(2) $m \le C \le M \Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi)=C$

例1 证明方程$x^3-4x^2+1=0$在$(0,1)$内至少有一实根。

证 记 $f(x)=x^3-4x^2+1\in C_{[0,1]}$

$$f(0)=1>0,\quad f(1)=-2<0$$

由介值定理(零点定理)知

$$\exists\xi\in(0,1),\ 使f(\xi)=0$$

即方程$f(x)=0$在$(0,1)$内至少有一实根。

例2 设$f(x),g(x)\in C_{[a,b]}$, $f(a)>g(a)$, $f(b)<g(b)$,证明:$\exists x_0\in(a,b)$使$f(x_0)=g(x_0)$.

证 设$F(x)=f(x)-g(x)\in C_{[a,b]}$,

$$F(a)>0,\ F(b)<0,$$

$\therefore \exists x_0\in(a,b)$, 使 $F(x_0)=0$ 即 $f(x_0)=g(x_0)$.

例3 设$f(x)\in C_{(-\infty,+\infty)}$，且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有界.

证 设$f(x)\to a, (x\to\infty)$,

对$\varepsilon=1, \exists X>0$，当$|x|>X$时，$|f(x)-a|<1$

即$x>X$及$x<-X$时，

$f(x)$局部有界

$$|f(x)| = |f(x)-a+a| \le |f(x)-a|+|a| < 1+|a|$$

又$f(x)\in C_{[-X,X]}$

$\therefore \exists M'>0$，当$x\in[-X,X]$时，$|f(x)|\le M'$.

取$M=\max\{M', |a|+1\}$,

则$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$|f(x)|\le M$.

例4 设$f(x)\in C_{[a,b]}$,且$a<c<d<b$,证明:$\exists\xi\in(a,b)$使

$$lf(c)+nf(d)=(l+n)f(\xi),\quad l、n\in N^{*}.$$

证. $\because f(x)\in C_{[c,d]}$, $\therefore \exists M=\max\limits_{x\in[c,d]} f(x)$, $m=\min\limits_{x\in[c,d]} f(x)$

$$\therefore m\le \frac{lf(c)+nf(d)}{l+n}\le M$$

$\therefore \exists \xi\in[c,d]\subset(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\dfrac{lf(c)+nf(d)}{l+n}$。

注 若在$[a,b]$上用介值定理,只能得$\xi\in[a,b]$